Title	確率微分方程式に対する各種の近似法(確率数値解析に於ける諸問題)
Author(s)	山田, 俊雄
Citation	数理解析研究所講究録 (1993), 850: 185-197
Issue Date	1993-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/83682
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
850巻 1993年 185-197

確率微分方程式に対する各種の近似法

立命館大学理工 山田 俊雄(Toshio Yamada)

こゝでは各種の近似法のなかからPicard 近似と講演者らによって定式化された確率微分方程式に対するNewton 法について議論しよう。

1. Picard 近似について

$(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ を通常のフィルター付の確率空間とする。 確率微分方程式

$$(1\cdot 1)\quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)\,dB_t + b(t, X_t)\,dt \\ X_0 = \xi. \end{cases}$$

こゝで B_t は $\mathcal{F}_t$-Brown運動,

について の解の存在と一意性については, σ 及び b に Lipschitz 条件を仮定して, K. Ito ([1]) が 1942年に証明を与えた. K. Ito の方法はPicard 近似によるもので, その証明の中で 解とPicard 近似の誤差評価が具体

的に与えられている．最近 L. Schwartz（[5]）は (1.1) の一般化である semi-martingale 方程式についても係数に Lipschitz 条件を置くとき，極めて速いスピードで Picard 近似が解に収束することを注意している．この L. Schwartz のコメントにも触れながら まず Lipschitz 条件の下での Picard 近似をとりあげる．記号を簡単にするため 1 次元の場合にのべるが，結果を多次元に 適当な修正を経て拡張できる．

1. A. Lipschitz 条件の下での Picard 近似

次の条件を σ，b に仮定．

（条件 L） ある $K>0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|$$
$$\leq K|x-y|, \quad {}^\forall(t,x,y)\in[0,\infty)\times R^2.$$

（条件 A） ある $L>0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)|^2+|b(t,x)|^2\leq L(1+x^2)$$
$${}^\forall(t,x)\in[0,\infty)\times R^1.$$

さて 初期条件に $E[|\xi|^2]<\infty$ を仮定して (1.1) の Picard 近似列を次のように作る．

$$X_t^{(0)}\equiv\xi,$$
$$X_t^{(n+1)}=\xi+\int_0^t\sigma(s,X_s^{(n)})dB_s+\int_0^t b(s,X_s)ds,$$

$n=0,1,2,\cdots$

$1 < T < \infty$ を任意に選んで固定する。

$E[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{(1)} - X_s^{(0)}|^2] = M < \infty$ はおくれ

分るがこの M を用いて $\max(8, 2T) = C_T$ とおくと

Lemma

$$E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}|^2] \leq M \frac{(C_T K^2)^n t^n}{n!}$$

$0 \leq t \leq T$ □

を帰納法を用いて係数 Lipschitz 条件と(A)の下で示せる。

以上により $\sum_{n=1}^{\infty} E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|] < \infty$

また $P(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > \frac{1}{2^n})$

$$\leq M \frac{(C_T K^2)^n T^n 4^n}{n!}$$ で右辺は収束列

Borel-Cantelli のレマで $X_t^{(n)}$ は $[0, T]$ で一様収束し極限の過程 X_t が(1.1)の解で一意性も保障されている。

さて $E(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2)^{1/2} = \|Y\|_{S^2}$ とおいて L. Schwartz の記号とコメントに従って誤差評価をまとめておこう。

$Y_\cdot^t = Y_{t \wedge \cdot}$ とおく。

$$\| (X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t \|_{S^2} = \left\{ E\left(\sup_{0 \le s \le t} |X_s - X_s^{(n)}|^2 \right) \right\}^{1/2}$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \left\{ E\left[\sup_{0 \le s \le t} |X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}|^2 \right] \right\}^{1/2}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \| (X_\cdot^{(k+1)} - X_\cdot^{(k)})^t \|_{S^2}$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{M (C_T K^2)^k}{k!} t^k \right)^{1/2}.$$

こゝで $e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right)^{1/2}$ と定義

$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} \right)^{1/2} \le \left(\frac{x^n}{n!} \right)^{1/2} e(x)$ に注意.

Theorem 1.1. (条件 L, A の下で)

(1.1) の解 X と Picard 近似 $X^{(n)}$ について

$$\| (X_\cdot - X_\cdot^{(n)})^t \|_{S^2} \le M^{1/2} \left\{ \frac{(C_T K^2 t)^n}{n!} \right\}^{1/2} e(C_T K^2 t)$$

$0 \le t \le T$ である。

I. B 非Lipschitz の下での Picard 近似.

確率微分方程式に於ても常微分方程式の場合と同じように非Lipschitz 条件でも 解の存在と一意性が保障される場合がいくつか知られている. このときに Picard 近似は解に収束するだろうか?. これについては, まだ決定的な結果は得られていないが, いくつかの結果がある. その中で典型的

なものを一つとりあげる．本質的には係数の Osgood 条件を仮定する場合である．（［7］参照）

（条件 B）　$L>0$ が存在して

$$|\sigma(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \le L(1+x^2)$$
$$\forall (t,x) \in [0,\infty) \times R^1$$

且つ

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2 + |b(t,x)-b(t,y)|^2 \le K(|x-y|^2)$$

こゝで

K は $[0,\infty)$ で定義され $K(0)=0$，連続，単調増加 Concave 且つ $\displaystyle\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$.

Theorem 1.2　（条件 B）の下で $1<T<\infty$ を固定すると Picard 近似列 $X^{(n)}$ は (1.1) の解 X に収束する．即ち

$$\|X^{(n)}_{\cdot} - X_{\cdot}\|_{S^2} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

なお条件 B の下で (1.1) の解の存在と一意性は保障されている．∎

Remark 1.　S. Kawabata（［2］）は上の定理を改良して

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2 + |b(t,x)-b(t,y)|^2 \le \frac{K(|x-y|^2)}{t^\alpha}$$

$0 \le \alpha < 1$，$\displaystyle\int_{0+} \frac{du}{K(u)} = \infty$ の下で

Picard近似を論じている。

Remark 2

方程式 $dX_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}\, dB_t$ に対し解の存在と一意性は保障されているが、Picard近似列が解に収束するか否かは不明である。■

2. 確率微分方程式に関するNewton法

こゝではNewton法を確率微分方程式に適用する試みをのべる。詳しくは[11]を参照して下さい。

$$(2\cdot1)\quad \begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \\ X_0 \equiv \xi \end{cases}$$

に対応して常微分方程式

$$(2\cdot2)\quad \begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

を考える。(2·2)に対しては、Chaplygin-Vidossich法とは

$$(2\cdot3)\quad \begin{cases} u'_{n+1} = f(t, u_n(t)) + f_x(t, u_n(t))(u_{n+1}(t) - u_n(t)) \\ u_{n+1}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

という準線形近似である。この近似はChaplyginによって

提案されたものである。 Vidossich [12] は適当な関数空間を設定し, operator F を

$$F(x(t)) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$$ とおくと,

(2.3) の近似は F についての Kantorovitch [10] の意味での Newton 法近似であることを示した。

さて (2.1) に対して Chaplygin - Vidossich 近似のアナロジーを試みよう。 ごく自然に次の近似を考えることができる。

(2.4)
$$X_t^{(0)} = \xi$$
$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\,dB_s + \int_0^t b(s, x_s^{(n)})\,ds$$
$$+ \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})\,dB_s$$
$$+ \int_0^t b_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})\,ds \quad .$$

以下で係数に適当な仮定を置き, 関数空間をうまく設定すると (2.4) の方法は operator F,

$$F(Z.)(t) = Z_t - Z_0 - \int_0^t \sigma(s, Z_s)\,dB_s - \int_0^t b(s, Z_s)\,ds$$

についての Newton 法であることを示そう.

$(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ を通常のフィルター付確率空間で B_t は $\mathcal{F}_t$ - Brown 運動とする.

係数 σ 及び b について, 次の仮定をおく。

（条件 2・A）

$\sigma(t,x)$ 及び $b(t,x)$ は2変数について連続。

$D_x\sigma(t,x)=\sigma_x(t,x)$，$D_x b(t,x)=b_x(t,x)$

がともに存在して，いずれも x について連続．

定数 $K>0$，$M>0$ が存在して，

$$|\sigma(t,x)|^2+|b(t,x)|^2 \le K(1+x^2),$$

$$|\sigma_x(t,x)| \le M,\quad |b_x(t,x)| \le M$$

$$\forall (t,x)\in[0,\infty)\times R^1 \quad \blacksquare$$

条件（2・A）の下で（2・1）に対して解の存在と道ごとの一意性が保障される．（条件2・A）より Lipschitz 条件が導びかれるのでこれは明らか。（2・1）の解を (X_t, B_t) と記す。さて $0<T<\infty$ を任意に選んで固定する。

$$\mathcal{L}_T=\{\varphi : [0,T]\times\Omega\to R,\ \varphi \text{ は } \mathcal{F}_t\text{-適合},\ t \text{ について連続で } E[\sup_{0\le t\le T}|\varphi(t,\omega)|^2]<\infty\}$$

$\varphi\in\mathcal{L}_T$ に対してノルム

$$\|\varphi\|_{S^2}=\|\varphi\|=\{E[\sup_{0\le t\le T}|\varphi(t,\omega)|^2]\}^{1/2} \text{ ときめる．}$$

t を固定して $\|\varphi(t\wedge\cdot,\omega)\|=\|\varphi\|_t$ とおく。

$Z \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$F(Z)(t) = Z_t(\omega) - Z_0(\omega) - \int_0^t \sigma(s, Z_s(\omega))\,dB_s - \int_0^t b(s, Z_s(\omega))\,ds \quad , \quad 0 \le t \le T$$

とおく。直ちに、

Lemma 2·1　F は $\mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_T$ である。■ を得る。

次に F について Gâteaux 微分を考えよう。

Lemma 2·2　$Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する。

$\forall h \in \mathcal{L}_T$ に対して

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u}\{F(Z+uh) - F(Z)\}$$ が $\mathcal{L}_T$ でのノルム収束の意味で存在する。

この極限を $dF(Z;h) = dF(Z;h)(t)$ で表すと

$dF(Z) : \mathcal{L}_T \to \mathcal{L}_T$ であって

$$dF(Z;h)(t) = h(t,\omega) - h(0,\omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z_s)\,h(s,\omega)\,dB_s - \int_0^t b_x(s, Z_s)\,h(s,\omega)\,ds$$

である。■

Z に於る Gâteaux 微分 $dF(Z)$ について、その逆写像の存在を確めよう。

Lemma 2・3. $Z \in \mathcal{L}_T$ を固定する。
$^\forall \varphi \in \mathcal{L}_T$, $\varphi(0, \omega) = 0$ に対して
$\varphi(t, \omega) = dF(Z ; h)(t)$ をみたす $h \in \mathcal{L}_T$,
$h(0, \omega) = 0$ が一意的に存在する
この h を $dF^{-1}(Z)(\varphi) = h$ で表す。 ■

（証明）

$$\varphi(t, \omega) = h(t, \omega) - \int_0^t \sigma_x(s, Z_s) h(s, \omega) dB_s - \int_0^t b_x(s, Z_s) h(s, \omega) ds$$

は線形確率微分方程式で拡散項，drift 項はともに Lipschitz 条件をみたすので $h(t, \omega)$ が存在して，一意である。■

さて F に対する L. A. Kantrovitch [10] の意味での Newton 近似列は

$$\begin{cases} X_t^{(0)} = \xi \\ X_t^{(n+1)} = X_t^{(n)} - dF^{-1}(X_\cdot^{(n)})\left(F(X_\cdot^{(n)})\right)(t) \end{cases}$$

で与えられるが，これを書き換えると

$$dF(X_\cdot^{(n)} ; X_\cdot^{(n+1)} - X_\cdot^{(n)}) = -F(X_\cdot^{(n)})$$

$$\text{左辺} = X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} - \int_0^t \sigma_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)}) dB_s$$

$$-\int_0^t b_x(s, X_s^{(n)})(X_s^{(n+1)} - X_s^{(n)})\,ds$$

$$= 右辺 = -X_t^{(n)} + \xi + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\,dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\,ds$$

である。これは(2.4)で考えた近似列そのものである。

Newton法の解への収束をのべる前に1つの評価式を挙げておく。

Lemma 2.4　ある定数 $L > 0$ が存在して

$$\| dF^{-1}(z)(\varphi) \|_t^2 \leq 3 \|\varphi\|_t^2 \, e^{Lt}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}_T \quad ■$$

Theorem 2.1 (局所的収束) 条件2.A の下で, δ を $120\delta M^2 e^{L\delta} = \alpha < 1$ となるように選ぶ。

このとき $\lim_{n\to\infty} E(\sup_{0\leq t\leq \delta} |X_t^{(n)} - X_t|^2) = 0$ である。

誤差評価として

$$\| X_\cdot^{(n)} - X_\cdot \|_\delta \leq \frac{\alpha^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{\alpha}} \| X_\cdot^{(1)} - X_\cdot^{(0)} \|_\delta$$

がなりたつ。■

Theorem（大域的収束）

条件2・Aに加えてさらに定数 $N>0$ が存在して，

$|\sigma(t,x)| \leq N$ ，$|b(t,x)| \leq N$，$^{\forall}(t,x) \in [0,\infty)\times R^1$ とする．

このとき任意の $0<T<\infty$ を固定すると

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)}-X_t|^2] = 0$$ が

$$\sup_n E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)}|^2] < \infty$$ が成り立つとき，

且つそのときに限り成り立つ。 ∎

Remark． Y. Ouknine は最近 Newton 法近似の大域的収束についての上の結果を改良し誤差評価を次のように与えることに成功したようである。（Preprint）

$$\| X_\cdot^{(n)} - X_\cdot \|_{S^2} \leq \mathrm{Const} \left\{ \frac{(\mathrm{Const}\cdot t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}^{1/2}$$

∎

References

(Picard Approximation)

1. K. Ito, *Differential Equations Determining Markoff Processes (Translated from the original Japanese. First Publication in Pan-Japan Math. Coll.No.1077 (1942))*, Kiyoshi Ito Selected Papers (D.W.Strook and S.R.S.Varadhan, eds.), Springer-Verlag, 1987, pp. 42-75.
2. S.Kawabata, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, Stochastics and Stoch. Rep. 30 (1990), 69-84.
3. G.S.Ladde and S.Seikala, *Existence, Uniqueness, and upper estimates for solutions of Macshane type stochastic differential systems*, Stochastic Analysis Appl. 4 (1986), 409-429.
4. P.A.Meyer, *Sur la méthode de L.Schwartz pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 25 (1991), 108-112.
5. L.Schwartz, *La convergence de la série de Picard pour les e.d.s.*, Séminaire de Probabilités 23 (1989), 343-354.
6. C. Tudor, *Approximaera succesiva a soltilor equatilor Ito cu doi parametri*, St. Cerc. Mat. 36 (1984), 50-61.
7. T. Yamada, *On the successive approximation of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 501-515.

(Newton's method)

8. A.T.Bharucha-Reid and M.J.Christensen, *Approximate solution of random integral equations ; General methods*, Math. Comput. in Simul. 26 (1984), 321-328.
9. A.T. Bharucha-Reid and Kannan, *Newton's method for random operator equations*, Nonlinear Anal. 4 (1980), 231-240.
10. L.A.Kantorovitch and G.P. Akilov, *Functional Analysis 2nd Ed.*, Pergamon Press, Oxford and New York, 1982.
11. S. Kawabata and T. Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de Probabilités 25 (1990), 121-137.
12. G. Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, J.Math.Anal.Appl. 66 (1978), 188-206.
13. Y.Ouknine, *Approximation de Newton pour les équation différentielles stochastiques*, preprint.